Marien LAURENT Université Paul Sabatier - Toulouse 3

AG 1 - Décomposition de Dunford - exponentielle de matrices

Recasages. $150, 151, 152, 155, 156$.
Références. *Algèbre*, Gourdon. *Algèbre et Géométrie*, Rombaldi.

Edit : je le rédige au frais, 2 heures après mon oral !

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

1. d est diagonalisable,
2. n est nilpotent,
3. $u = d + n$,
4. $d \circ n = n \circ d$.

De plus, d et n sont des polynômes en u.
Démonstration.
Existence. Notons

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

le polynôme caractéristique de u. D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton,

$$E = \ker(\chi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}.$$

Notons pour chaque i, $N_i = \ker(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$. Alors tous les N_i sont stables par u. En effet, soit $x \in N_i$, montrons que $u(x) \in N_i$.

$$\begin{aligned}(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i} \circ u(x) &= u \circ (u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) \text{ car } \mathbb{K}[u] \text{ est commutative} \\ &= u(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ensuite, notons pour chaque i, π_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$, c'est-à-dire

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} E = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j & \longrightarrow & N_i \\ x = \sum_{j=1}^{s} x_j & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

D'après la preuve du lemme des noyaux, la projection en u est un polynôme en u. Posons

$$d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \pi_i \in \mathbb{K}[u].$$

Alors d est diagonalisable, comme somme d'endomorphismes diagonalisables (ce sont des projecteurs) qui commutent deux à deux. *(Un projecteur est annulé par $X(X-1)$ scindé simple. En dimension 3 c'est un bon exemple d'endomorphisme diagonalisable dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé simple.)*
Ensuite, posons $n = u - d \in \mathbb{K}[u]$. Donc n commute bien avec d car ce sont tous les deux des polynômes en u et on les a construits tels que $u = d + n$.
Montrons que n est nilpotent. Posons $\alpha = \max_{i\in\{1,\dots,s\}} \alpha_i$. Soit $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_s) \in \oplus_i N_i$ tel que $x = x_1 + \dots + x_s$. Alors,

$$\begin{aligned} n^\alpha(x) &= \sum_i n^\alpha(x_i) \\ &= \sum_i (u - \lambda_i Id)^\alpha(x_i) \text{ car } N_i \text{ est stable par } u \\ &= 0 \text{ car } \alpha \geq \alpha_i. \end{aligned}$$

Unicité. Soit (d', n') un autre couple vérifiant les quatre items du théorème. d' commute avec u car

$$d'u = d'(d' + n') = (d' + n')d' = ud',$$

donc d' commute en particulier avec d, le polynôme en u qu'on a construit dans l'existence. Comme ils sont de plus tous les deux diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables, et on déduit que $d - d'$ est diagonalisable. Mais de l'égalité

$$u = d + n = d' + n'$$

on déduit

$$d - d' = n' - n.$$

Ainsi $n' - n$ est un endomorphisme diagonalisable. Or, il est également nilpotent. En effet, soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n^p = n'^q = 0$. Alors, en remarquant que n et n' commutent également,

$$(n' - n)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} (n')^k n^{p+q-k} \times (-1)^{p+q-k} = 0$$

car ou bien $k \geq q$ et $n'^q = 0$, ou bien $k < q$, et donc $p + q - k > p + q - q = p$.
Donc, $n' - n$ est à la fois diagonalisable et nilpotent : il est identiquement nul. Donc $n = n'$ et $d = d'$. $\square$
.

Application aux matrices

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son pôlynome caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$, et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford avec A diagonalisable et N nilpotente d'indice $q \geq 1$. Alors la décomposition de Dunford de e^A est

$$e^A = e^D + e^D(e^N - I_n).$$

Démonstration. Comme D et N commutent et que $N^k = 0$ pour $k \geq q$, on a

$$\begin{aligned}
e^A &= e^{D+N} \\
&= e^D e^N \\
&= e^D \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} N^k \\
&= e^D (I_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} N^k) \\
&= e^D + e^D \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} N^k \\
&= e^D + N e^D \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} N^{k-1} \quad \text{car } e^D \in \mathbb{K}[u] \text{ et } N \text{ commutent} \\
&= \tilde{D} + \tilde{N}
\end{aligned}$$

avec $\tilde{D} = e^D$ diagonalisable car D l'est, et $\tilde{N} = N e^D \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} N^{k-1}$ nilpotente par commutativité. Cette décomposition est alors unique. □

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$. A est diagonalisable si, et seulement si, e^A l'est.

Démonstration. Si A est diagonalisable, en passant à la limite dans les sommes partielles, on a bien e^A qui est semblable à une matrice diagonale. Réciproquement, si on suppose e^A diagonalisable, alors sa partie nilpotente dans sa décomposition de Dunford est nulle, c'est-à-dire $e^D(e^N - I_n) = 0$. Comme e^D est inversible, on a $e^N - I_n = 0$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} N^k = 0.$$

Ainsi $P = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} X^k = 0$ annule N. Or le polynôme minimal de N est $\mu_N = X^q$, donc μ_N divise P. En termes de coefficient dominant, nécessairement $q = 1$ donc $N = 0$ donc $A = D+N = D$ est diagonalisable. □